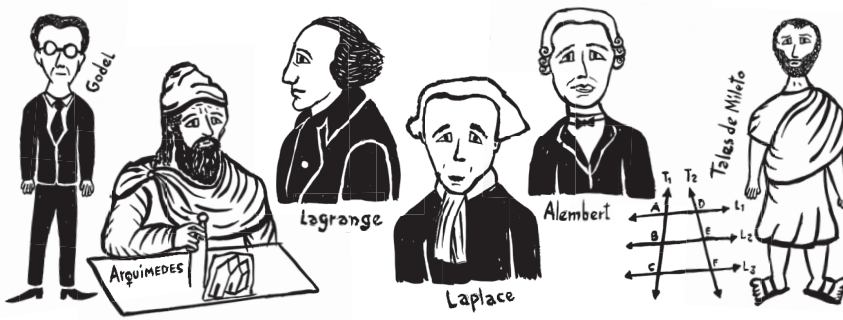
21 TEOREMAS MATEMÁTICOS

QUE REVOLUCIONARAM O MUNDO



* MARIA HELENA SOUZA *

Planeta

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

21

Sumário

	Apresentação	5
1	Teorema de Pitágoras	8
2	Teorema de Tales	24
3	Teoremas das Bissetrizes	36
4	Teorema ou Lei dos Cossenos e dos Senos	48
5	Teorema de Heron	60
6	Teorema de Descartes	70
7	O Teorema das Quatro Cores	82
8	Teorema Fundamental da Aritmética	92
9	Teorema Chinês do Resto	104
10	Último Teorema de Fermat	114
11	Teorema Fundamental da Álgebra	124
12	Teorema de D' Alembert	138
13	Teorema de Laplace	148
14	Teorema do Binômio de Newton	160
15	Teorema de Bäyes	174
16	Teorema de Godel	186
17	Teorema de Lagrange	198
18	Teorema Fundamental do Cálculo	212
19	Teorema de Taylor	222
20	Teorema da Função de Contração	234
21	Teorema de Rice	246
	Rerências bibliográficas	254

Planeta

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

Apresentação

O conhecimento matemático, assim como o de outras áreas, surgiu para resolver problemas cotidianos e de sobrevivência da humanidade. Desde a Antiguidade há registros da resolução de problemas tendo a Matemática como ferramenta e incluindo instrumentos de calcular, como o ábaco na versão oriental (*soroban* no Japão e *suanpan* na China) e na versão ameríndia – asteca (*nepohualtzitzin*) e inca (*quipo*: tiras com nós). O comum a todos os conhecimentos assim estabelecidos é a conexão entre as ideias matemáticas e o modelo econômico vigente, que garantiu a aceitação e a incorporação de outras formas de analisar e explicar fatos e fenômenos, junto às diversas culturas.

Os problemas trazem as dificuldades humanas e buscam respostas para elas, dando origem a conjecturas, que são palpites plausíveis com base em algumas evidências. Uma formulação de hipótese pede a identificação de padrões – identificáveis por todos. Os matemáticos exigem mais do que evidências, demandam provas com lógica impecável. Todos teoremas que constam desta obra são generalizações de conhecimentos considerados válidos para outras várias situações e que foram demonstrados de forma a garantir sua universalização. Fazem parte desta obra, aplicações de cada um dos teoremas em diferentes áreas e descobertas, além de uma breve apresentação dos matemáticos que os desenvolveram.

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

1

TEOREMA DE PITÁGORAS

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

1

TEOREMA DE PITÁGORAS

VÍNCULOS ENTRE NÚMEROS E GEOMETRIA?

A Escola de Pitágoras, embora fortemente conectada aos números, deixou como legado um famoso teorema com significativas aplicações geométricas.

Planeta

Para compreender o papel do Teorema de Pitágoras na história da Matemática, é preciso retomar o que se tem dado como sabido acerca do nascimento da Geometria. Ela teria surgido às margens do rio Nilo, devido à necessidade de medir as áreas de terras a serem redistribuídas entre os que as perderam após as enchentes. Essa hipótese data dos escritos de Heródoto, no século V a.C., que relatam as inspeções de terrenos e consequentes medições de suas reduções, para atribuir aos proprietários originais uma diminuição proporcional de impostos.

As narrativas convencionais estabeleceram a crença de que a Matemática considerada válida é a europeia, surgida na época de Tales de Mileto. Tales viveu entre os séculos VII e VI a.C. e sofreu influência dos babilônios da Mesopotâmia e dos egípcios. A originalidade pitagórica foi a introdução da ideia de matemática abstrata, estabelecida na Grécia, na primeira metade do século V a.C., e que serviu de referência para o seu desenvolvimento entre as épocas de Tales e de Euclides. O que se enfatiza neste capítulo é a passagem de uma matemática marcada por cálculos e técnicas operatórias, realizada por babilônios e egípcios, para outra mais

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

QUEM FOI

Pitágoras

Não há provas registradas que Pitágoras tenha de fato existido. Supõe-se que ele nasceu na ilha de Samos (no mar Egeu), filho de um mercador, no século V a.C. Fez diversas viagens ao Egito e à Jônia, atual Turquia, acompanhando o pai, onde entrou em contato estreito com alguns pensadores da época. Dizem ter sido Pitágoras o fundador de escolas de conhecimento, a primeira em Samos, conhecida como Escola Pitagórica, e posteriormente em Crotona, nas quais desenvolveu-se não apenas uma teoria de conhecimento sobre números, mas também um sistema de vida, com rituais de purificação e iniciações que preparavam seus discípulos para se colocarem em harmonia com os números e compreendê-los. Tais escolas deram origem à Teoria dos Números, base de tudo que se sabe hoje em Ciência e Tecnologia. É atribuída a Pitágoras a criação da escala musical pitagórica, que é bastante utilizada na música árabe, diferente da mais conhecida, a criada por Bach. No Brasil, a escala pitagórica aparece, em geral, na música nordestina.

Embora não seja possível provar a existência de Pitágoras, não há duvidas sobre a comprovada Escola Pitagórica, que surgiu na mesma época de sua suposta vida.

Planeta

teórica, a praticada pelos gregos, que se consolidou com base em argumentações e demonstrações consistentes.

O Teorema de Pitágoras foi divulgado em todo o ocidente. Diz-se que é conectado a situações geométricas, inclusive em sua demonstração. É o que será tratado nesta obra. O teorema mais famoso, que é associado ao nome de Pitágoras, estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, assim explicitado:

> O quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas de seus catetos.

Sabe-se que essa relação era conhecida por diversos povos antigos, mas o importante não é apenas destacar seu valor histórico, ou se foram os gregos ou não os primeiros a conhecê-la; e sim, estabelecer a relação entre uma situação geométrica com outra numérica e explicitar suas aplicações, antigas e atuais.

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

A demonstração do teorema, encontrada em *Os elementos,* de Euclides, utiliza resultados que não eram conhecidos na época da Escola Pitagórica. Pode-se dizer que a demonstração não foi desenvolvida pelos pitagóricos, e que há também diversas maneiras de apresentar e demonstrar o Teorema de Pitágoras.

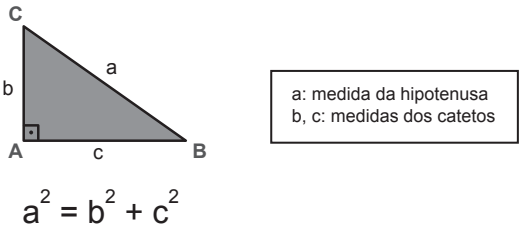


Figura 1

Burkert (1972) afirma que o Teorema de Pitágoras era muito mais numérico que geométrico, baseado em padrões numéricos presentes nos números que são conhecidos como figurados ou geométricos: os triangulares, os quadrados etc. Ele se refere às triplas pitagóricas, estabelecidas por dois números quadrados, que podem ser associadas às medidas dos lados de um triângulo retângulo. Segundo o autor, as triplas foram obtidas pelo estudo dos números ímpares, vistos como esquadros em técnicas de cálculo.

Assim, o número geométrico quadrado 4 aparece representado em uma tripla tomando como destaque o número quadrado 1, cercado pelos esquadros que o ladeiam:

Planeta

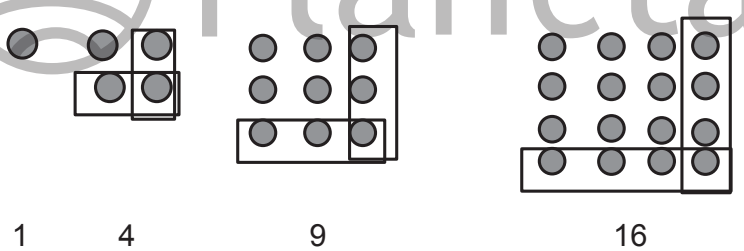


Figura 2

O número quadrado 4 aparece no número quadrado 9 representado na tripla que o destaca. Pelo desenho anterior é facilmente reconhecível o número quadrado 9 destacado no número 16.

- Para obter o número 4, que é quadrado, a partir do número quadrado 1, basta adicionar o próximo número ímpar a 1, que é 3 ou: 3 + 1 = 4.
- Para obter o número quadrado 9, a partir do número 4, basta adicionar o próximo número ímpar a 3, que é 5 ou: 4 + 5 = 9.
- Para obter o número quadrado 16, temos o número quadrado 9 e o número ímpar 7 ou: 16 = 9 + 7.

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

A primeira tripla que remete ao Teorema de Pitágoras é formada pelos números 3, 4 e 5 porque compõem o número quadrado 25, pois 25 = 16 + 9 que é igual a $4^2 + 3^2 = 5^2$. Os números 3, 4 e 5 correspondem às medidas dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo. O desenho ao lado mostra o triângulo retângulo que corresponde à tripla e os quadrados que mostram a Relação de Pitágoras (entre as medidas dos lados do triângulo) pelos quadrados, com as medidas 3, 4 e 5 unidades.

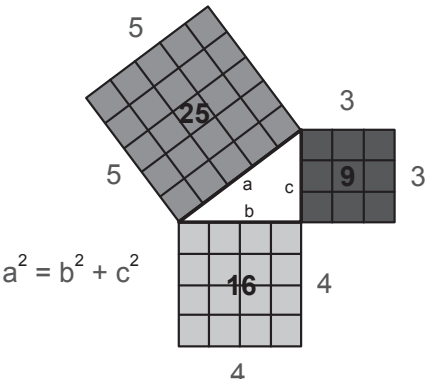


Figura 3

Há indícios de que as triplas fossem também conhecidas pelos babilônios, mas não há provas concretas de que o teorema que prova a Relação de Pitágoras tivesse sido reconhecido e demonstrado mil anos antes da existência da Escola Pitagórica.

É possível estabelecer uma conexão entre a Relação de Pitágoras e os nós em corda, utilizados pelos egípcios na formação do contorno de um triângulo retângulo, base para a demarcação de terras que ladeiam o rio Nilo. São 12 nós equidistantes e a distribuição é a mostrada na figura ao lado. Observe as medidas 3, 4 e 5, tomando como unidade a distância entre dois nós consecutivos.

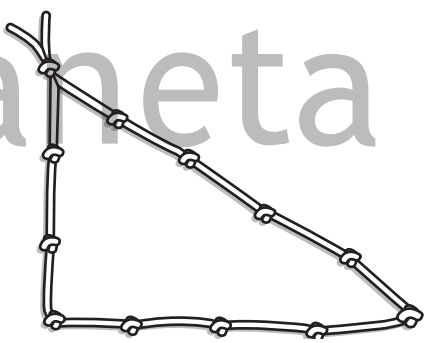


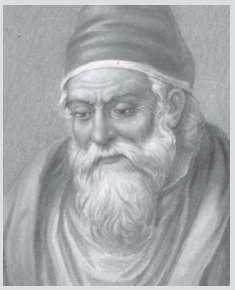
Figura 4

Organizando o cordão e os nós com o formato do contorno de um triângulo, esse será um triângulo retângulo. Assim, faz sentido pensar em números e relações geométricas com base no conhecimento que a Escola Pitagórica tinha dos números.

Todos os triângulos que têm medidas proporcionais às da tripla pitagórica (3, 4, 5) são também retângulos – (6, 8, 10); (9, 12, 15) etc. – e são denominados triângulos pitagóricos. Mas não apenas os triângulos pitagóricos são retângulos. O triângulo cujos lados medem 5, 12 e 13 unidades não é pitagórico e obedece à Relação de Pitágoras:

$5^2 + 12^2 = 13^2$ ou $25 + 144 = 169$

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.



Akg-images/Album/Fotoarena

QUEM FOI

Euclides

Nascido em Alexandria, escreveu a obra *Os elementos*, que é vista e conhecida como o auge do esforço de organização da geometria grega até o século III a.C., revelando o pensamento axiomático, que parte de princípios; e o dedutivo, associando a geometria prática a bases mais sólidas de conhecimento. Constam de *Os elementos* não apenas a geometria, mas parte da Teoria de Números e de Conceitos Musicais.

A obra traz as construções geométricas feitas com régua e compasso, instrumentos diferentes dos que hoje são conhecidos como tais. A régua não trazia medidas e o compasso não tinha articulação que mantivesse os "braços" da peça fixos.

Uma curiosidade: em tempos contemporâneos, não são mais definidos os entes geométricos ponto e reta. Em *Os elementos* isso ocorre, pois a definição acaba por, de certa forma, humanizar o conceito, embora não tenha sido esta a intenção do autor. Eis as definições de Euclides: ponto é aquilo de que nada é parte. Linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.

Planeta

Teorema de Pitágoras: uma demonstração

Para validar uma proposição matemática é necessário prová-la, de forma que se torne verdadeira para todos os casos. Existem mais de trezentas demonstrações do Teorema de Pitágoras, e as escolhas caem em dois tipos possíveis: as geométricas, baseadas em comparações entre áreas de polígonos, e as algébricas, que utilizam as relações métricas de um triângulo retângulo.

A mais simples é a baseada em construções em malha quadriculada, como a mostrada na figura 3, e vale para triângulos cujos lados medem 3, 4 e 5 unidades.

A escolha para esta obra foi a da demonstração feita pelo livreiro inglês Henry Perigal, em 1873, baseada em construções geométricas para deter-

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

minar polígonos congruentes, isto é, aqueles que têm todos os elementos correspondentes com a mesma medida – ângulos e lados. A demonstração se inicia com a construção de quadrados sobre os lados de triângulo retângulo.

Na figura 5 temos o triângulo retângulo ABC, e os quadrados CBDE, ACFG e ABIH, com medidas iguais às medidas dos lados do triângulo.

Sobre o lado $\overline{AB}$, o maior cateto, está construído o quadrado CBDE, onde são desenhados dois segmentos: um paralelo à hipotenusa $\overline{AB}$ e outro perpendicular a ela, ambos passando pelo centro do quadrado. Os segmentos dividem o quadrado em quatro polígonos congruentes. As quatro partes, mais o quadrado construído sobre o lado do menor cateto, compõem o quadrado ABIH, que tem os lados com a mesma medida da hipotenusa.

Notação para segmento: $\overline{AB}$ Notação para medida de segmento: AB

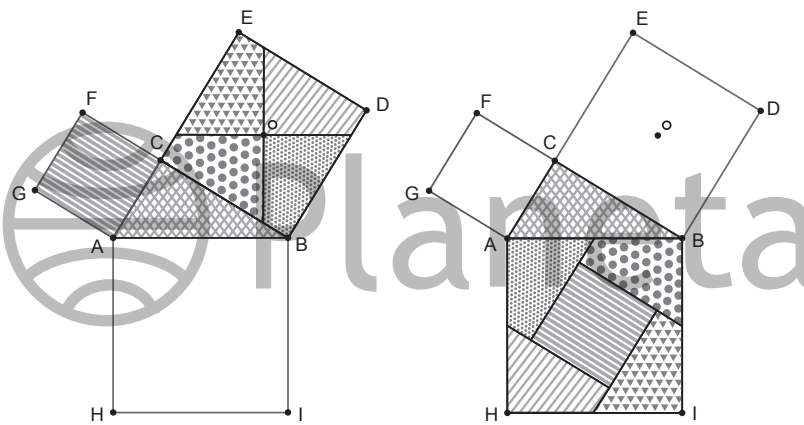
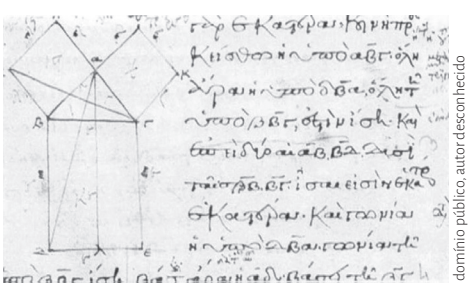


Figura 5

As construções compõem uma bela forma visual de demonstrar o teorema. O leitor, se achar interessante, pode provar geometricamente que os quatro polígonos construídos no quadrado CBDE são congruentes e que o quadrado menor, que está dentro do quadrado maior, é congruente ao quadrado ACFG.

Euclides propôs uma demonstração do Teorema de Pitágoras que utiliza construções geométricas. O fragmento mostra a proposição 47 do livro I da obra *Os elementos* (figura 6).



domínio público, autor desconhecido

Figura 6

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

FIQUE POR DENTRO

OS NÚMEROS E A ESCOLA PITAGÓRICA

Para entrar na Escola Pitagórica, o candidato (somente homens eram aceitos) se submetia a duras provas, físicas e psicológicas, com o propósito de mostrar pendor para os estudos matemáticos e religiosos. Se as ultrapassasse, ele seria aceito como acusmático, que significa que deveria fazer voto de silêncio por cinco anos. Os ensinamentos não eram escritos, mas transmitidos de "boca a ouvido" para os que estavam prontos a assimilá-los. Grande parte desse conhecimento se perdeu, mas chegaram à contemporaneidade alguns conceitos curiosos sobre os números:

- O número 1 simbolizava a razão; o número 2, a opinião ou o primeiro feminino; o número 3 é o primeiro masculino; o número 4, a justiça ou o segundo feminino. Cada um deles correspondia aos quatro elementos.

- Existiam números perfeitos, e a perfeição dependia dos divisores do número. Se a soma dos divisores de um número, exceto ele mesmo, é maior do que ele, o número é excessivo; se menor, o número é deficiente; se igual, o número é perfeito.

- O número 12 é excessivo porque 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16; 16 é maior que 12.

- O número 6 é perfeito porque 1 + 2 + 3 = 6; a soma é igual a 6.

- O número 4 é deficiente, porque 1 + 2 = 3; 3 é menor que 4.

- Os números são considerados amigos se cada um deles é igual à soma dos divisores do outro, exceto o outro. Os números 220 e 284 são amigos:

Soma dos divisores de 220, exceto ele mesmo:
1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.
Soma dos divisores de 284, exceto ele mesmo:
1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.

Fica aqui uma pergunta para o leitor:
Os números 120 e 160 são amigos?
Os divisores de 120, exceto ele mesmo, são: 1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40 e 60.
E os de 160? São amigos?

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

Aplicações do teorema na matemática e em outras áreas do conhecimento

Os números irracionais e o "susto" da Escola Pitagórica – É fácil pensar as medidas de comprimento que são obtidas utilizando números naturais (inteiros positivos) ou racionais – que podem ser escritos na forma fracionária, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero –, além da forma decimal.

São exemplos:

$$2 = \frac{2}{1} \; ; -0{,}5 = -\frac{1}{2} \; ; 0{,}55... = \frac{5}{9}$$

Os números racionais, quando expressos na forma decimal, apresentam a parte depois da vírgula exata, como:

$$0{,}133 = \frac{133}{1000}$$

ou com a repetição de um padrão, como

$$0{,}353535... = \frac{35}{99}$$

Planeta

Os números irracionais não podem ser representados por meio de frações com numerador e denominador inteiro e têm a representação decimal infinita, mas sem repetição de padrões. São exemplos: $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$; o número pi ou $\pi = 3{,}1415926...$; o número de ouro ou $\varphi = 1{,}61803398...$

O número π está presente nas fórmulas de cálculo do comprimento da circunferência ($2\pi r$, sendo r o raio da circunferência) e a área do círculo (πr^2). O número φ, também conhecido como razão áurea, está presente como razão entre as medidas dos elementos de obras de arte e de arquitetura, como no Parthenon. O retângulo da foto página seguinte evidencia a relação entre as medidas estabelecidas como harmoniosas para o olhar humano: a razão entre comprimento e largura é φ. Ressalta-se que o mesmo ocorre entre as medidas de um cartão de crédito.

A razão φ é igual a $\frac{+\sqrt{5}}{5}$

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.

Shutterstock

Parthenon, Atenas, Grécia

A Escola Pitagórica utilizava como símbolo o pentagrama (estrela pentagonal), construído com base em um pentágono regular, traçando-se as suas diagonais. No pentagrama regular ABCDE, a razão áurea está entre as medidas de segmentos, como entre:

$$\text{AC e FC e } \frac{1+\sqrt{5}}{5} = \frac{\text{AC}}{\text{FC}}$$

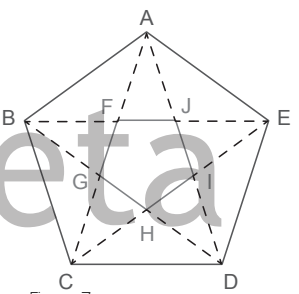


Figura 7

Estabelecer medidas irracionais pede maneiras de construir triângulos retângulos a partir de um triângulo inicial, que seja isósceles, cujos catetos meçam uma unidade, pois $1^2 + 1^2 = 2$ e a medida da hipotenusa é $\sqrt{2}$ unidades. As demais medidas irracionais partem da construção de $\sqrt{2}$.

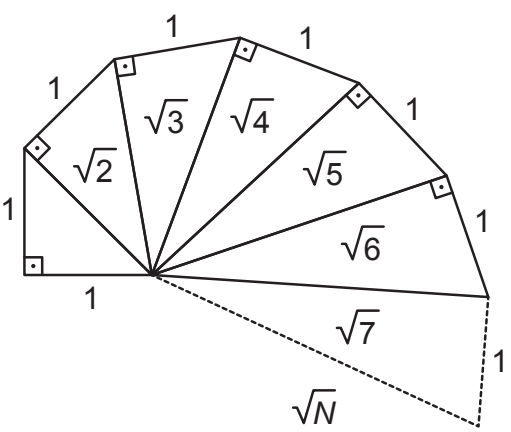


Figura 8

Trecho antecipado para divulgação. Venda proibida.